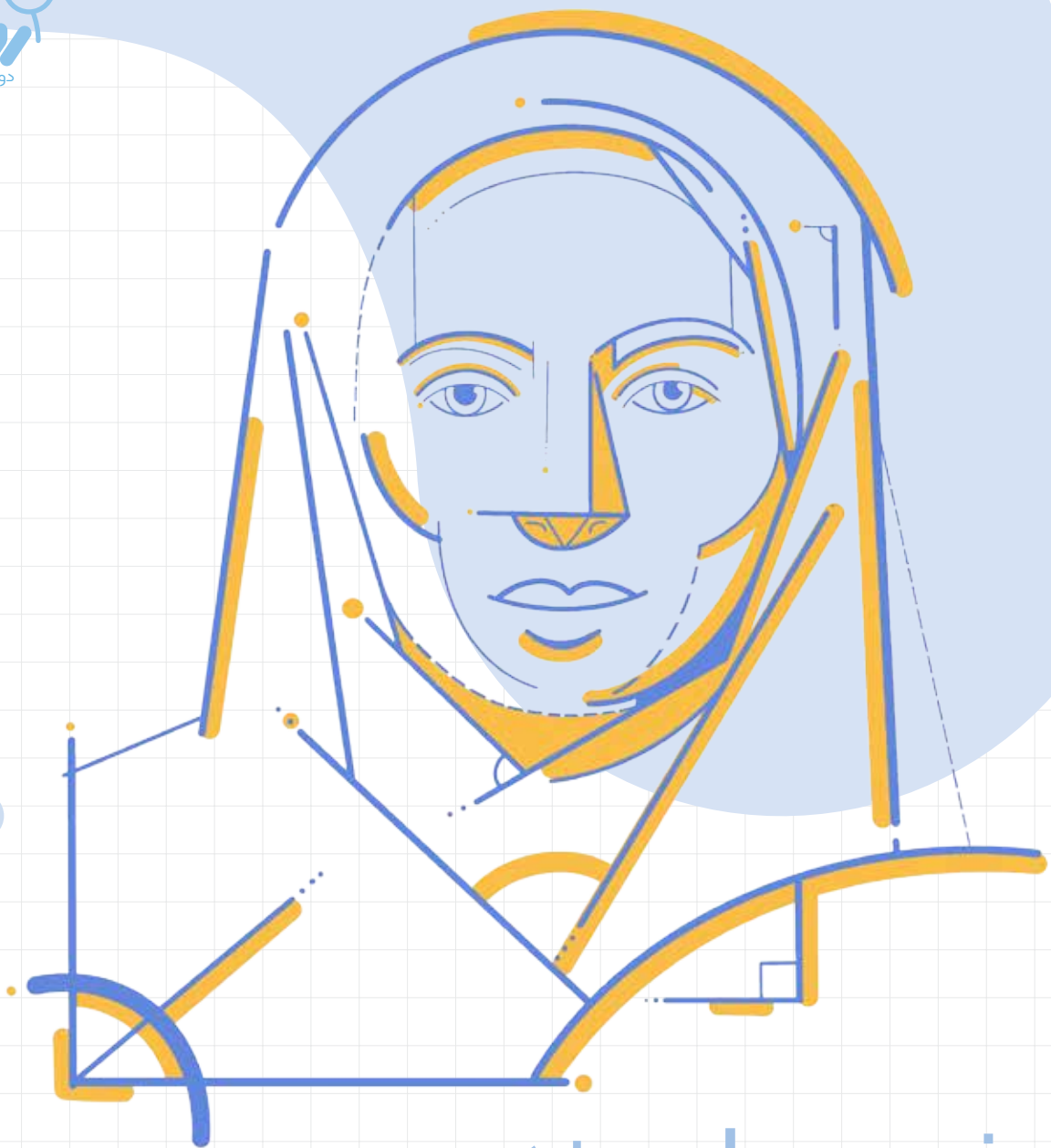
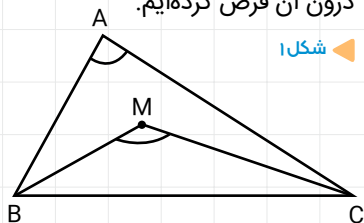




مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

● محمود نصیری
نامساوی‌ها در
هندسه

هندسه، مسئله‌ها و قضیه‌های مربوط به آن را ثابت کنیم. شکل ۱ را در نظر بگیرید که در آن $\triangle ABC$ و نقطه M را درون آن فرض کرده‌ایم.



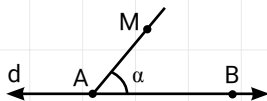
◀ شکل ۱

این قضیه را بیان کنیم، مثال‌هایی را از کاربرد آن بیان می‌کنیم. بیشتر مسئله‌های نامساوی‌ها در مثلث، به‌طور شهودی درست به نظر می‌رسند، اما با گسترش هندسه‌های جدید و انواعی از هندسه‌ها، گاهی فرضی در یکی درست اما در دیگری به شکلی دیگر درست است. پس باید با توجه به اصول و قضیه‌های ثابت‌شده در

در قسمت اول مطلب و در شماره قبل، ابتدا نامساوی‌ها را در مورد پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها تعریف کردیم. سپس قضیه مهمی را به نام قضیه زاویه بیرونی ثابت کردیم. **قضیه زاویه بیرونی در مثلث.** در هر مثلث، اندازه هر زاویه بیرونی از اندازه هر زاویه درونی غیرمجاور آن بزرگ‌تر است. قبل از اینکه یکی از کاربردهای مهم

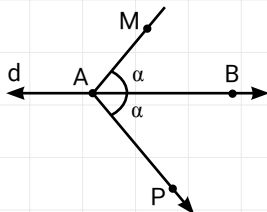
بر آن مفروض اند. نشان دهید خطی وجود دارد که از M می‌گذرد و بر خط d عمود است و این خط فقط یکی است.

شکل ۴



دو نقطه متمایز A و B را روی خط d در نظر بگیرید و خطی را که از A و M می‌گذرد رسم کنید (شکل ۴). فرض کنید اندازه زاویه $\angle MAB$ برابر α باشد. اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد، خود خط AM بر d عمود است (طبق تعریف). اما اگر α برابر 90° نباشد، فکر می‌کنید چگونه از نقطه M بر خط d خطی عمود رسم می‌کنیم؟ البته می‌دانید که به طور شهودی این کار با گونیا انجام می‌شود، اما می‌خواهیم بدون به کار بردن گونیا و با اثبات، روشی را برای رسم پیدا کنیم. برای مشخص کردن هر خط، حداقل باید دو نقطه متمایز آن را داشته باشیم، اما یک نقطه این خط معلوم است. باید نقطه دیگری از آن را مشخص کنیم. قبلاً هم توضیح داده‌ایم که در بیشتر مسئله‌های هندسه، رسم خطهای اضافی، کمکی مهم به حل مسئله هستند. در واقع، این خطهای اضافی بخش‌های پنهان مسئله را آشکار می‌کنند.

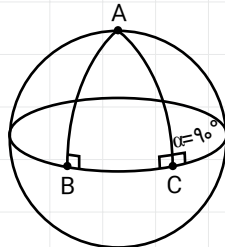
شکل ۵



برای آنکه بتوانیم از آنچه در مورد خطهای عمود و عمودمنصف می‌دانیم، به خوبی استفاده کنیم، به نظر می‌رسد نقطه دیگر در طرفی از خط d باشد که M واقع نیست (شکل ۵). چون در اثبات‌ها معمولاً از هم‌نهشتی‌ها

از پاره‌خطهای $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ روی خطی واقع‌اند که یک دایره روی کره و به مرکز کره است (شکل ۳). دو تا از این خطها از قطب می‌گذرد و یکی مانند خط استوا روی کره زمین است.

شکل ۳



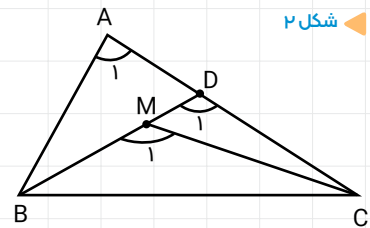
در شکل ۱ دو خط $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ بر خط $\overline{BC}$ عمود هستند. بنابراین، در $\triangle ABC$ اندازه‌های هر یک از زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابر 90° است. در نتیجه اندازه زاویه خارجی در رأس B نیز قائمه و اندازه‌اش برابر اندازه زاویه درونی غیرمجاور آن است. حتی می‌تواند اندازه زاویه در رأس A نیز از 90° بیشتر باشد.

بعداً خواهیم دید، قضیه زاویه بیرونی در مثلث یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های هندسه اقلیدسی است که نه تنها ورود به نامساوی‌های مثلثی را هموار می‌کند، بلکه پایه اثبات یکتایی خط عمود بر یک خط از یک نقطه است. قضیه وجود خط عمود و یکتا بودن آن یکی از اساسی‌ترین قضیه‌ها در گسترش هندسه‌ای است که در آن اصل توازی را نداریم. یعنی هندسه‌ای که در آن ممکن است از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، بیش از یک خط به موازات آن رسم کرد. اقلیدس ادعا می‌کرد، عمود بودن به وسیله خط‌کش و پرگار ساخته می‌شود، اما با توجه به قضیه‌هایی که تاکنون بیان کرده‌ایم، می‌خواهیم نشان دهیم چگونه از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، خطی وجود دارد که بر آن عمود است و چرا این خط یکتاست.

طرح مسئله. خط d و نقطه M غیرواقع

از نقطه M به دو رأس B و C دو خط می‌کشیم. در مورد اندازه زاویه‌های $\angle BAC$ و $\angle BMC$ چه نظری دارید؟ کدام بزرگ‌تر است؟ شاید با دیدن شکل بگویید $\angle BMC$ از $\angle BAC$ بزرگ‌تر به نظر می‌رسد. به کمک قضیه زاویه بیرونی می‌توانیم آن را ثابت کنیم. کافی است ضلع BM را امتداد دهیم تا ضلع AC را در نقطه D قطع کند (شکل ۲). با توجه به شکل و قضیه زاویه بیرونی، رابطه بین زاویه‌ها را از نظر بزرگی و کوچکی چگونه می‌نویسید؟

شکل ۲

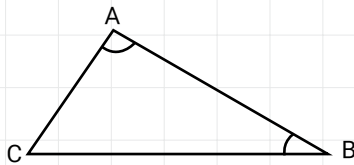


$\angle D_1 > \angle M_1$ و $\angle D_1 > \angle A_1$ چرا؟ بنابراین: $\angle M_1 > \angle A_1$.

اکنون که با مثال ساده‌ای از کاربرد قضیه زاویه بیرونی آشنا شدیم، به دنبال مسئله مهم‌تری از کاربردهای قضیه زاویه بیرونی می‌رویم. وقتی قضیه زاویه بیرونی را ثابت کردیم، مشاهده کردیم، اگر از این قضیه که مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است استفاده نکنیم، که در روند ساختن دقیق هندسه واقعاً نباید از آن استفاده کنیم، اثباتی که ارائه دادیم، اثباتی عادی نیست و اساس اثبات به تبحر خاص در هندسه نیاز دارد. بنابراین، خود قضیه بدون این فرض‌ها ممکن است نادرست باشد. به عبارت دیگر، رسم خط عمود از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، دقیقاً به این قضیه وابسته است؛ به‌ویژه وقتی هنوز اصل توازی را بیان نکرده باشیم. قبلاً در مورد هندسه‌ای که روی کره برقرار است، توضیح دادیم. مشاهده کردید که روی کره، منظور از خط، دایره‌هایی هستند که مرکز آن‌ها روی مرکز کره است. با توجه به این تعریف، هر کدام

دیگر آن می‌پردازیم. از کاربردهای مهم قضیه زاویه بیرونی، سه نامساوی مهم در مثلث است. نامساوی‌ها در مثلث معمولاً به‌طور شهودی واضح به نظر می‌رسند. مثلاً اگر $\triangle ABC$ را چنان رسم کرده باشیم که اندازه ضلع BC که مقابل $\angle A$ است، از اندازه ضلع AC که مقابل $\angle B$ است بزرگتر باشد (شکل ۸)، به‌طور شهودی به نظر می‌رسد زاویه $\angle A$ نیز از $\angle B$ بزرگتر است یا برعکس. اگر $\angle A$ بزرگتر از $\angle B$ باشد، ضلع BC از ضلع AC بزرگتر است.

شکل ۸



همچنین، در هر $\triangle ABC$ مشاهده می‌کنید که مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه ضلع سوم بزرگتر است. مثلاً $AB + AC > BC$. این نامساوی در هندسه اقلیدسی به نامساوی کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه B و C نیز معروف است. این مسئله‌ها با وجود اینکه به‌طور شهودی واضح به نظر می‌رسند، در هندسه همگی ثابت می‌شوند. در بخش بعدی، این نامساوی‌ها را به‌عنوان سه قضیه مهم هندسه اقلیدسی بیان و ثابت می‌کنیم. سپس سعی می‌کنیم مثال‌ها و مسئله‌های جالبی را از آن‌ها نتیجه بگیریم.

در مورد اثبات به روش تناقض (برهان خلف) توضیح‌هایی داده‌ایم. چگونه به این روش یکتا بودن خط MN را ثابت می‌کنید؟ مسلماً باید فرض کنید خط دیگری وجود داشته باشد و سپس به یک تناقض برسید. فرض کنید از نقطه M دو خط متمایز MH و MK عمود بر خط d رسم شده باشند (شکل ۷).

شکل ۷



احتمالاً به‌سادگی بیان می‌کنید که در $\triangle MHK$ مجموع اندازه‌های دو زاویه برابر 180° است و این غیرممکن است، زیرا در این صورت مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث از 180° بیشتر می‌شود و این در هندسه اقلیدسی غیرممکن است، اما این اثبات زمانی درست است که قبل از آن ثابت کرده باشیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. معمولاً هم در هندسه‌های مقدماتی چنین استدلالی مطرح می‌شود، اما اگر روش ساختن هندسه به‌طوری مطرح شده باشد که هنوز اصل توازی یا معادل آن بیان نشده باشد، به کمک قضیه زاویه بیرونی که در بخش قبلی ثابت کردیم نیز به‌سادگی ثابت می‌شود، اگر هر دو خط MH و MK بر خط d عمود باشند، آنگاه اندازه زاویه بیرونی $\angle MKB$ برابر اندازه زاویه درونی $\angle MHB$ شده است و این نیز یک تناقض است.

بنابراین، به هر دو روش بالا به یک تناقض می‌رسیم. این تناقض از فرضی ناشی می‌شود که بیان شده دو خط عمود بر d رسم کرده‌ایم. پس این فرض نادرست است و در نتیجه فرض فقط یک خط عمود، می‌تواند درست باشد. به این ترتیب اثبات قضیه کامل است. اکنون که با یکی از کاربردهای قضیه زاویه بیرونی آشنا شدیم، به کاربردهای

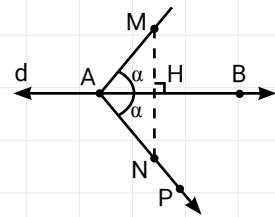
بسیار استفاده می‌کنیم، در اینجا سعی می‌کنیم از A خط AP را که P در طرف دیگر خط d است، چنان رسم کنیم که اندازه $\angle BAP$ برابر همان α یعنی اندازه $\angle BAM$ باشد.

در واقع مانند آن است که نیمساز زاویه $\angle MAP$ روی خط d واقع است. فکر کنم به اثبات خیلی نزدیک شده‌ایم. چرا؟

ساختن دو مثلث هم‌نهشت یا یک مثلث خاص چگونه به حل مسئله کمک می‌کند؟ احتمالاً ساختن یک مثلث متساوی‌الساقین اثبات را کامل می‌کند.

N را روی نیم‌خط $\overrightarrow{AP}$ چنان در نظر می‌گیریم که $AN = AM$ (شکل ۶). اکنون در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle AMN$ ، $\overline{AB}$ که نیمساز است، شامل ارتفاع AH نیز می‌شود و این یعنی خط MN بر خط d عمود است و این همان خطی است که به دنبال آن بودیم.

شکل ۶



البته برای بخش آخر مسئله می‌توانیم از هم‌نهشتی دو مثلث $\triangle AMH$ و $\triangle ANH$ نیز استفاده کنیم.

$AN = AM$ ، $\angle MAH = \angle NAH$ و $AH = AH$. بنابراین (ض ز ض) این دو مثلث هم‌نهشت و دو زاویه $\angle MAH$ و $\angle NAH$ هم‌اندازه‌اند، اما مجموع اندازه‌های آن‌ها برابر 180° است. در نتیجه اندازه هر یک برابر 90° است: $\angle AHM = 90^\circ$. یعنی خط MH بر خط d عمود است. در اینجا اثبات وجود خطی عمود بر یک خط از یک نقطه غیرواقع بر آن کامل می‌شود.

اما اثبات بخش دوم مسئله، یعنی یکتا بودن این خط، چندان سخت نیست. کمی روی آن فکر کنید. قبلاً